★

Exercice 1

Dans chacun des cas suivant, on admet que la fonction f est définie et dérivable sur le domaine $\mathcal{D}_f$. Calculer la dérivée de f dans chaque cas.

a) $f(x) = \cos(3x^2), \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = (1 + \ln(x))^4, \quad \mathcal{D}_f =]0; +\infty[$

c) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \ln(2 + \sin x), \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

e) $f(x) = \ln(|1 + x|), \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

f) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3 - x^2}, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

★

Exercice 2

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**
   a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.
      Étudier le sens de variation de la fonction g.
   b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2) **Étude de la fonction f**
   a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
      Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

★ ★

Exercice 3

Pour chacune des fonctions suivantes :

- ▷ déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$
- ▷ déterminer, si elles existent, ses limites aux bornes de son ensemble de définition en précisant les asymptotes éventuelles,
- ▷ étudier ses variations en précisant les extremums,
- ▷ étudier le signe de f,
- ▷ tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$

b) $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

c) $h(x) = \ln(5 - \sqrt{x^2 - 144})$

d) $k(x) = \dfrac{1}{x^3 + x^2 - 2x}$

e) $r(x) = \dfrac{\ln(1 - x)}{\ln(x)}$

f) $t(x) = \sin\left(\frac{\pi}{1 + (\ln(x))^2}\right)$

★ ★

Exercice 4

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) et du cercle trigonométrique de centre O et de rayon OI. Soit t un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi; \pi]$. On note M le point image de $\dfrac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique, et N le point image de t. On considère enfin le point K milieu du segment $[MN]$.
On cherche la position de N sur le cercle trigonométrique telle que la distance IK soit minimale.

1) Quelles sont les coordonnées de M, N et K ?
2) Justifier que, pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[-\pi; \pi]$, on a

$$4IK^2 = 4 - 3\cos t + \sqrt{3}\sin t$$

3) On pose $f(t) = 4 - 3\cos t + \sqrt{3}\sin t$
   Montrer que $f'(t) = 2\sqrt{3}\sin\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right)$
   a) Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation $\sin\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right) \geqslant 0$
   b) En déduire le tableau de variation de la fonction f
   c) Conclure.

★ ★

Exercice 5

Soit f une fonction dérivable de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| < 1$
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0;1]$.

★ ★

Exercice 6

1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) < x$.
2) En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) < 2\sqrt{x}$
3) En déduire la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ lorsque $x \to +\infty$.

★ ★ ★

Exercice 7

Soient $\lambda, \mu > 0$ deux réels tels que $\lambda + \mu = 1$.

1) Montrer que pour tout $x, y \in]0;+\infty[$, $\lambda x + \mu y \geq x^\lambda y^\mu$ avec égalité si et seulement si $x = y$.
2) Soient $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in (\mathbb{R}^{+*})^p$ et $(b_1, b_2, \dots, b_p) \in (\mathbb{R}^{+*})^p$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{p} a_k^\lambda b_k^\mu \leq \left(\sum_{k=1}^{p} a_k\right)^\lambda \left(\sum_{k=1}^{p} b_k\right)^\mu$$